

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

**УТВЕРЖДЕНО**  
решением Ученого совета факультета математики,  
информационных и авиационных технологий  
от «21» мая 2024 г. протокол 5/24  
Председатель М.А. Волков  
*цифровая подпись*  
«21» мая 2024 г.



### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина	Вариационное исчисление
Факультет	Математики, информационных и авиационных технологий
Кафедра	Прикладной математики
Курс	1

Направление (специальность): 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация): Имитационное моделирование и анализ данных

Форма обучения: очная

Дата введения в учебный процесс УлГУ:

1 сентября 2024 г.


Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_ от \_\_\_ 20\_\_\_ г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_ от \_\_\_ 20\_\_\_ г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_ от \_\_\_ 20\_\_\_ г.

Сведения о разработчиках:

ФИО	Кафедра	Должность, ученая степень, звание
Савинов Ю.Г.	ПМ	Доцент, к.ф.м.н., доцент

<b>СОГЛАСОВАНО</b>
Заведующий выпускающей кафедрой прикладной математики
 / <u>Бутов А.А.</u> / Подпись / ФИО «21» мая 2024 г.

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Учебная дисциплина «Вариационное исчисление» знакомит студентов с классическими методами вариационного исчисления. Она является одной из дисциплин по выбору по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

**Цель** дисциплины: ознакомление студентов с основами методов вариационного исчисления; формирование навыков работы с абстрактными понятиями математики; знакомство с прикладными задачами дисциплины.

**Основной задачей** изучения дисциплины является освоение базовой техники составления и решения задач вариационного исчисления, которые естественным образом возникают во многих областях человеческой деятельности. Для его понимания необходимо знакомство с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений в объеме курса бакалавриата.

Дисциплина «Вариационное исчисление» базируется на знаниях и умениях, полученных студентами при изучении курсов (по программам бакалавриата или специалитета): математический анализ, алгебра и геометрия, дифференциальные уравнения.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП:

Дисциплина «Вариационное исчисление» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 «Дисциплины (модули)» Основной Профессиональной Образовательной Программы по направлению 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Данная дисциплина базируется на входных знаниях, умениях, навыках и компетенциях студента, полученных им в бакалавриате.

Результаты освоения дисциплины будут необходимы для дальнейшего процесса обучения в рамках поэтапного формирования компетенций при изучении последующих дисциплин (указаны в ФОС, пункт 1): «Математическое моделирование сложных систем», а также для прохождения всех видов практик и государственной итоговой аттестации.

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ


Код и наименование реализуемой компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций
ПК-3 способность разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий	<b>знать</b> основные определения, формулировки теорем и постановки основных типов задач вариационного исчисления <b>уметь</b> решать основные типы задач вариационного исчисления <b>владеть</b> методами решения основных типов задач вариационного исчисления

## 4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего): 5 зачетных единиц.

4.2. Объем дисциплины по видам учебной работы (в часах):

Вид учебной работы	Количество часов (форма обучения: очная)
--------------------	--

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

1	Всего по плану	В т.ч. по семестрам
		1
1	2	3
Контактная работа обучающихся с преподавателем в соответствии с УП	366	36
Аудиторные занятия	36	36
Лекции	18	18
Семинары и практические занятия	–	–
Лабораторные работы, практикумы	18	18
Самостоятельная работа	108	108
Форма текущего контроля знаний и контроля самостоятельной работы: тестирование, контр. работа, коллоквиум, реферат и др. (не менее 2 видов)	устный опрос, сдача лабораторных работ	устный опрос, сдача лабораторных работ
Курсовая работа	–	–
Виды промежуточной аттестации (экзамен, зачет)	экзамен 36	экзамен 36
Всего часов по дисциплине	180	180

*\*В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий в таблице через слеш указывается количество часов работы ППС с обучающимися для проведения занятий в дистанционном формате с применением электронного обучения*

#### 4.3. Содержание дисциплины (модуля). Распределение часов по темам и видам учебной работы:

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	Всего	Виды учебных занятий					Форма текущего контроля знаний
		Аудиторные занятия			Занятия в интерактивной форме	Самостоятельная работа	
		Лекции	Практические занятия, семинары	Лабораторные работы, практикумы			
1	2	3	4	5	6	7	8
<b>2 семестр</b>							
<b>Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ</b>							
1.1. История развития вариационного исчисления	9	1				8	устный опрос
<b>Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления</b>							
2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее	11	1		-		10	устный опрос

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

свойства							
2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	12	2		-		10	устный опрос
2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами	21	2		9		10	устный опрос, проверка лабораторной работы
2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами	21	2		9		10	устный опрос, проверка лабораторной работы
2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца	12	2				10	устный опрос
2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в	12	2				10	устный опрос

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

задаче Лагранжа							
<b>Раздел 3. Условия второго порядка</b>							
3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума	23	2				20	устный опрос
3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато	12	2				10	устный опрос
3.3 Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления	12	2				10	устный опрос
Экзамен	36						
Всего	180	18			18	108	

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### Раздел 1. Введение

1.1 История развития вариационного исчисления.

### Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления

2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства.

2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.

2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.

2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца.

2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа.

### Раздел 3. Условия второго порядка

3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума.


3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато.

3.3 Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления.

## 6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

## 7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ПРАКТИКУМЫ

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

По блоку математических и естественнонаучных дисциплин используются различные пакеты (свободно распространяемые для использования в учебных целях или на которые у УлГУ есть лицензии) прикладных программ, таких как Maple 16: Universities or Equivalent Degree Granting Institutions Non-Floating New License 5 to 100 Users Academic (академическая, бессрочная). При выполнении лабораторных работ возможно использование других пакетов (Mathcad, Mathematica, MatLab и др.).

## Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления

**Тема 2.4.** Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.

**Лабораторная работа № 1.** *Найти расстояние между кривыми в пакете Maple.*

**Методические указания (рекомендации):** использовать команды **Diff, diff, dsolve**.

Введем обозначения:  $Y = y(x)$ ,  $DY = y'(x)$ ,  $D2Y = y''(x)$ ,  $x_0 = x_0$ ,  $x_1 = x_1$ ,  
 $y_0 = y_0$ ,  $y_1 = y_1$ .

Пример 1. Найти расстояние между параболой  $y = x^2$  и прямой  $y = x - 5$ .

**Решение:** Эта задача с подвижными границами. Задача сводится к нахождению экстремального значения функционала  $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2} dx$ , при условии, что левый конец экстремали может перемещаться по кривой  $y = \varphi(x) = x^2$ , а правый – по прямой  $y = \psi(x) = x - 5$ .

1. Задаем подынтегральную функцию:

**>restart;**

**>F:=(x,Y,DY)->sqrt(1+DY^2);**

$$F := (x, Y, DY) \rightarrow \sqrt{1 + DY^2}$$

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

>  $x0:=X0;x1:=X1;$

$$x0 := X0 \quad x1 := X1$$

2. Задаем две фиксированные кривые  $y = x^2$  и  $y = x - 5$ , находим их производные:

>  $F1:=(x)->x^2; dF1:=diff(F1(x),x);$

$$F1 := x \rightarrow x^2 \\ dF1 := 2x$$

>  $F2:=(x)->x-5; dF2:=diff(F2(x),x);$

$$F2 := x \rightarrow x - 5 \\ dF2 := 1$$

3. Составляем функционал:

>  $J:=int(F(x,y(x),diff(y(x),x)),x=x0..x1);$

$$J := \int_{x0}^{x1} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2} dx$$

4. Записываем основную формулу уравнения Эйлера:


>  $eq:=diff(F(x,Y,DY),Y)-diff(diff(F(x,Y,DY),x),DY)-$   
 $diff(diff(F(x,Y,DY),Y),DY)*DY-diff(F(x,Y,DY),DY^2)*D2Y=0;$

$$eq := - \left( - \frac{DY^2}{(1 + DY^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + DY^2}} \right) D2Y = 0$$

5. Выполняем замены (операторsubs)  $Y = y(x)$ ,  $DY = y'(x)$ ,  $D2Y = y''(x)$ :

>  $eq1:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x^2),eq);$

$$eq1 := - \left( - \frac{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) = 0$$

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

6. Находим общее решение уравнения Эйлера:

> rez:=dsolve(eq1);

$$rez := y(x) = \_C1 x + \_C2$$

> assign(rez):y(x):

7. Записываем условия трансверсальности:

$$\left[ F(x, y, y') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y') \right]_{x=x_0} = 0, \left[ F(x, y, y') + (\psi' - y') F_{y'}(x, y, y') \right]_{x=x_1} = 0.$$

> dFdY:=diff(F(x,Y,DY),DY);

$$dFdY = \frac{DY}{\sqrt{1 + DY^2}}$$

> df:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x\$2),dFdY):

> us\_t1:=F(x,y(x),diff(y(x),x))+(dF1-diff(y(x),x))\*df=0;

$$us\_t1 := \sqrt{1 + \_C1^2} + \frac{(2x - \_C1) \_C1}{\sqrt{1 + \_C1^2}} = 0$$

> us\_t2:=F(x,y(x),diff(y(x),x))+(dF2-diff(y(x),x))\*df=0;

$$us\_t2 := \sqrt{1 + \_C1^2} + \frac{(1 - \_C1) \_C1}{\sqrt{1 + \_C1^2}} = 0$$


> a:=subs(x=x0,us\_t1);

$$a := \sqrt{1 + \_C1^2} + \frac{(2X0 - \_C1) \_C1}{\sqrt{1 + \_C1^2}} = 0$$

> b:=subs(x=x1,us\_t2);

$$b := \sqrt{1 + \_C1^2} + \frac{(1 - \_C1) \_C1}{\sqrt{1 + \_C1^2}} = 0$$



Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

8. Записываем граничные условия

$$y(x_0) = C_1 x_0 + C_2 = \varphi(x_0) = x_0^2, \quad y(x_1) = C_1 x_1 + C_2 = \psi(x_1) = x_1 - 5.$$

> `left:=subs(x=x0,y(x))=F1(x0);`

$$left := \_C1 X0 + \_C2 = X0^2$$

> `right:=subs(x=x1,y(x))=F2(x1);`

$$right := \_C1 X1 + \_C2 = X1 - 5$$

9. Находим  $\_C1$ ,  $\_C2$ ,  $X0$ ,  $X1$  и экстремаль:

> `rez1:=solve({left,right,a,b});`

$$rez1 := \left\{ X0 = \frac{1}{2}, X1 = \frac{23}{8}, \_C1 = -1, \_C2 = \frac{3}{4} \right\}$$

> `y(x):=subs(rez1,y(x));assign(rez1);`

$$y(x) := -x + \frac{3}{4}$$

10. Находим значение функционала при полученном решении:


> `F(x,y(x),diff(y(x),x)):`

> `J;`

$$\frac{19}{8} \sqrt{2}$$

### Варианты заданий

1. Найти расстояние между параболой  $y = x^2 + 1$  и прямой  $y = x - 2$ .
2. Найти расстояние между параболой  $y = x^2 + 3$  и прямой  $y = x - 3$ .
3. Найти расстояние между параболой  $y = x^2 + 3$  и прямой  $y = x - 5$ .
4. Найти расстояние между параболой  $y = 2x^2$  и прямой  $y = x - 3$ .
5. Найти расстояние между параболой  $y = 3x^2$  и прямой  $y = x - 6$ .
6. Найти расстояние между параболой  $y = 2x^2 + 1$  и прямой  $y = x - 4$ .
7. Найти расстояние между параболой  $y = 3x^2 + 2$  и прямой  $y = x - 3$ .
8. Найти расстояние между параболой  $y = 2x^2 + 1$  и прямой  $y = x - 5$ .
9. Найти расстояние между параболой  $y = 4x^2 + 1$  и прямой  $y = x - 1$ .
10. Найти расстояние между параболой  $y = 3x^2 + 1$  и прямой  $y = x - 2$ .

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

**Тема 2.3.** Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.

**Лабораторная работа №2.** Найти экстремаль функционала в пакете Maple.

**Методические указания (рекомендации):** использовать команды **Diff**, **diff**, **dsolve**.

**Пример 2.** Найти экстремаль для функционала  $J[y(x)] = \int_0^1 y'(y' - x) dx$ .

1. Задаем подинтегральную функцию и известные данные:

> **restart;**

> **F:=(x,Y,DY)->DY\*(DY-x);**

$$F = (x, Y, DY) \rightarrow DY(DY - x)$$

> **x0:=0;x1:=1;**

$$x0 = 0$$

$$x1 = 1$$

2. Составляем функционал:

> **J:=int(F(x,y(x),diff(y(x),x)),x=x0..x1);**

$$J = \int_0^1 \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) \left( \frac{d}{dx} y(x) - x \right) dx$$

3. Записываем основную формулу уравнения Эйлера:

> **eq:=diff(F(x,Y,DY),Y)-diff(diff(F(x,Y,DY),x),DY)-diff(diff(F(x,Y,DY),Y),DY)\*DY-diff(F(x,Y,DY),DY\$2)\*D2Y=0;**

$$eq = 1 - 2 D2Y = 0$$

4. Выполняем замены (оператор subs)  $Y = y(x)$ ,  $DY = y'(x)$ ,  $D2Y = y''(x)$ :

> **eq1:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x\$2),eq);**

$$eq1 = 1 - 2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) = 0$$


5. Находим общее решение уравнения Эйлера.

> **rez:=dsolve(eq1);**

$$rez = y(x) = \frac{1}{4} x^2 + \_C1 x + \_C2$$

> **assign(rez):y(x);**

$$\frac{1}{4} x^2 + \_C1 x + \_C2$$

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

6. Записываем естественные краевые условия на левом и правом концах  $F_{y'}(x, y, y')|_{x=0} = 0$ ,  $F_{y'}(x, y, y')|_{x=1} = 0$ :

>  $dFdY := \text{diff}(F(x, Y, DY), DY)$ ;

$$dFdY = 2 \cdot DY - x$$

>  $us := \text{subs}(Y=y(x), DY=\text{diff}(y(x), x), D2Y=\text{diff}(y(x), x)\$2), dFdY)=0$ ;

$$us = 2 \cdot \_C1 = 0$$

>  $right := \text{subs}(x=x0, us)$ ;

$$right = 2 \cdot \_C1 = 0$$

>  $left := \text{subs}(x=x1, us)$ ;

$$left = 2 \cdot \_C1 = 0$$

7. Решаем систему:

>  $rez1 := \text{solve}(\{right, left\})$ ;

$$rez1 = \{\_C1 = 0\}$$

>  $y(x) := \text{subs}(rez1, y(x))$ ;

$$y(x) = \frac{1}{4} x^2 + \_C2$$

8. Находим значение функционала при полученном решении:

>  $F(x, y(x), \text{diff}(y(x), x))$ ;

$$-\frac{1}{4} x^2$$

>  $J$ ;

$$-\frac{1}{12}$$

### Варианты заданий

Для своего варианта функционалов а), б), в) найти экстремали. Вычислить значения функционалов на найденных экстремалиях.

Вариант 1.

a).  $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx$ ;  $y(-1) = 3$ ;  $y(1) = 1$ ;

b).  $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'e^{2x} + \sin^2 x) dx$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y(2) = -2$ ;

c).  $J(y) = \int_0^1 y\sqrt{1+y'^2} dx$ ;  $y(0) = 2$ ;  $y(1) = 3$ ;

Вариант 2.

a).  $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2) dx$ ;  $y(-1) = 2$ ;  $y(1) = 4$ ;

b).  $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'\sin 2x - x^2) dx$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y(2) = -1$ ;

c).  $J(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$ ;  $y(0) = 2$ ;  $y(1) = 1$ ;

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

Вариант 3.

- a).  $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 4x^2y + x \cos x) dx$ ;  $y(-1) = 2$ ;  $y(1) = 0.5$ ;
- b).  $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y' \cos 2x + 5 \sin 3x) dx$ ;  $y(0) = 2$ ;  $y(2) = -3$ ;
- c).  $J(y) = \int_0^1 yy'^2 dx$ ;  $y(0) = 2$ ;  $y(1) = 1$ ;

Вариант 4.

- a).  $J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 9y^2 + 2xy - x \sin x) dx$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y(2) = 2$ ;
- b).  $J(y) = \int_1^3 \left( y'^2 - \frac{4y'}{x} + x \sin x \right) dx$ ;  $y(1) = 1$ ;  $y(3) = -2$ ;
- c).  $J(y) = \int_0^1 \sqrt{y(1+y^2)} dx$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y(1) = 3$ ;

Вариант 5.

- a).  $J(y) = \int_{-2}^0 (y'^2 - 4y^2 + 2y + xe^{2x}) dx$ ;  $y(-2) = 0$ ;  $y(0) = 1$ ;
- b).  $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2y'e^x + \cos x) dx$ ;  $y(-1) = 2$ ;  $y(1) = 3$ ;
- c).  $J(y) = \int_1^3 y\sqrt{y'} dx$ ;  $y(1) = 2$ ;  $y(3) = 8$ ;

Вариант 6.

- a).  $J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 9y^2 + 2y \sin x - x^2 e^x) dx$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y(1) = -1$ ;
- b).  $J(y) = \int_{-1}^1 \left( y'^2 - \frac{2y'}{1+x^2} + e^{2x} \right) dx$ ;  $y(-1) = 0$ ;  $y(1) = 3$ ;
- c).  $J(y) = \int_0^2 y\sqrt{1+y^2} dx$ ;  $y(0) = -1$ ;  $y(2) = -3$ ;

Вариант 7.

- a).  $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 6ye^x + 2x \cos x) dx$ ;  $y(-1) = 1$ ;  $y(1) = 3$ ;
- b).  $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y'e^x \cos x - \sin x) dx$ ;  $y(-1) = 1$ ;  $y(1) = 2$ ;
- c).  $J(y) = \int_0^2 yy'^2 dx$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y(2) = 3$ ;

Вариант 8.

- a).  $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + y^2 + 4ye^x - x \sin x) dx$ ;  $y(-1) = 1$ ;  $y(1) = 3$ ;
- b).  $J(y) = \int_1^3 (y'^2 - y' \ln x + 2x) dx$ ;  $y(1) = 2$ ;  $y(3) = -1$ ;

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

$$c). J(y) = \int_0^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx; \quad y(0)=4; \quad y(2)=2;$$

Вариант 9.

$$a). J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 8ye^{2x} + 3x^2) dx; \quad y(-1)=1; \quad y(1)=3;$$

$$b). J(y) = \int_{-1}^1 (y' + y'^2 \cos^2 x - \sin^2 x) dx; \quad y(-1)=1; \quad y(1)=-2;$$

$$c). J(y) = \int_0^2 y \sqrt{y'} dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=4;$$

Вариант 10.

$$a). J(y) = \int_0^2 (2y'^2 + 2y^2 + y \cos x - 5x) dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=2;$$

$$b). J(y) = \int_1^3 (y' + y'^2 \sin^2 x + e^{2x}) dx; \quad y(1)=-1; \quad y(3)=4;$$

$$c). J(y) = \int_0^2 \sqrt{y(1+y'^2)} dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=1;$$

## 8. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

## 9. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ

### 1 семестр (экзамен)

1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства.
2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.
4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности.
5. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.
6. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца.
7. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца.
8. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа.
9. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума.
10. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато.
11. Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления.

## 10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩИХСЯ

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	Вид самостоятельной работы (проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная)	Объем в часах	Форма контроля

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

	<i>работа, подготовка к сдаче зачета, экзамена и др.)</i>		
<b>1 семестр</b>			
<b>Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ</b>			
1.1. История развития вариационного исчисления	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	8	устный опрос
<b>Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления</b>			
2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос, сдача лабораторных работ
2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос, сдача лабораторных работ
2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
<b>Раздел 3. Условия второго порядка</b>			
3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	20	устный опрос
3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос
3.3. Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	10	устный опрос

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

## 11. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### а) Список рекомендуемой литературы

#### основная

1. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для вузов / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 435 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01456-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510931>
2. Васильева, А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 432 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 10) - ISBN 5-9221-0276-1. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102761.html>

#### Дополнительная

1. Дьяконов В.П., Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах [Электронный ресурс] / Дьяконов В.П. - М. : ДМК Пресс, 2011. - 800 с. - ISBN 978-5-94074-751-2 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940747512.html>
2. Дифференциальные уравнения : практикум. Учебное пособие / Л. А. Альсевич, С. А. Мазаник, Г. А. Расолько, Л. П. Черенкова. — Минск : Вышэйшая школа, 2012. — 382 с. — ISBN 978-985-06-2111-5. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/20196.html>

#### учебно-методическая

1. Савинов Ю. Г. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Вариационное исчисление» для студентов магистратуры по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» / Ю. Г. Савинов. - Ульяновск : УлГУ, 2022. - 10 с. - Неопубликованный ресурс. - URL: <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/13204>.
2. Савинов Ю. Г. Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Вариационное исчисление» для студентов магистратуры по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» / Ю. Г. Савинов. - Ульяновск : УлГУ, 2022. - 10 с. - Неопубликованный ресурс. - URL: <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/13203>.

**б) Программное обеспечение:** МойОфис Стандартный, Альт Рабочая станция 8. ОС Calculate Linux, Maplesoft Maple Educational.

### в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы

*Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы*

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

## 1. Электронно-библиотечные системы:

1.1. Цифровой образовательный ресурс IPRsmart : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа». - Саратов, [2024]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.2. Образовательная платформа ЮРАЙТ : образовательный ресурс, электронная библиотека : сайт / ООО Электронное издательство ЮРАЙТ. – Москва, [2024]. - URL: <https://urait.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.3. База данных «Электронная библиотека технического ВУЗа (ЭБС «Консультант студента») : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Политехресурс. – Москва, [2024]. – URL: <https://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.4. Консультант врача. Электронная медицинская библиотека : база данных : сайт / ООО Высшая школа организации и управления здравоохранением-Комплексный медицинский консалтинг. – Москва, [2024]. – URL: <https://www.rosmedlib.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.5. Большая медицинская библиотека : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Букап. – Томск, [2024]. – URL: <https://www.books-up.ru/ru/library/>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.6. ЭБС Лань : электронно-библиотечная система : сайт / ООО ЭБС Лань. – Санкт-Петербург, [2024]. – URL: <https://e.lanbook.com>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.7. ЭБС Znanium.com : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Знаниум. - Москва, [2024]. - URL: <http://znanium.com>. – Режим доступа : для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

**2. КонсультантПлюс** [Электронный ресурс]: справочная правовая система. / ООО «Консультант Плюс» - Электрон. дан. - Москва : КонсультантПлюс, [2024].

**3. Базы данных периодических изданий:** eLIBRARY.RU: научная электронная библиотека : сайт / ООО «Научная Электронная Библиотека». – Москва, [2024]. – URL: <http://elibrary.ru>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный

**4. Федеральная государственная информационная система «Национальная электронная библиотека»** : электронная библиотека : сайт / ФГБУ РГБ. – Москва, [2024]. – URL: <https://нэб.рф>. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

**5. Российское образование** : федеральный портал / учредитель ФГАУ «ФИЦТО». – URL: <http://www.edu.ru>. – Текст : электронный.

**6. Электронная библиотечная система УлГУ** : модуль «Электронная библиотека» АБИС Мега-ПРО / ООО «Дата Экспресс». – URL: <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Web>. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

## 12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Аудитории для проведения лекций, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, групповых и индивидуальных консультаций.

Аудитории укомплектованы специализированной мебелью, учебной доской. Аудитории для проведения лекций оборудованы мультимедийным оборудованием для



Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

предоставления информации большой аудитории. Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде, электронно-библиотечной системе.

### 13. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться одни из следующих вариантов восприятия информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей:

– для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий, организация работы ППС с обучающимися с ОВЗ и инвалидами предусматривается в электронной информационно-образовательной среде с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

Разработчик



подпись

доцент

должность

Савинов Ю.Г.

ФИО